

Tomando como ejemplo una clase de matemáticas, en este artículo se propone la solución de problemas como uno de los métodos de enseñar a aprender. Para que esta enseñanza sea efectiva tiene que partir de tareas poco rutinarias que planteen alguna dificultad a los alumnos y los obliguen a reflexionar sobre los objetivos y los procedimientos que ponen en marcha, aprendiendo a planificar, supervisar y evaluar su propio aprendizaje. Los profesores deben guiar ese aprendizaje para evitar que los estudiantes se pierdan.

Palabras clave: aprendizaje estratégico, resolución de problemas, ejercicios, competencia matemática, aprender a aprender, planificación, supervisión, evaluación, autorregulación del aprendizaje.

Laura, la estudiante del artículo precedente, ha sacado finalmente una buena nota en el examen de geografía, y ahora está centrando su esfuerzo en matemáticas. Durante mucho tiempo ha tenido sentimientos muy contradictorios frente a esta materia. Por un lado, le daba miedo, ya que las «mates no son de aprender, sino de pensar y entender, y esto es más difícil y puede que una no sea capaz de hacerlo». Quizá por eso, o porque no entiende bien para qué sirven, siente que lo que estudia en matemáticas no tiene nada que ver con lo que hace fuera de clase o con otras materias. Pero, por otro lado, también se da cuenta de que en realidad hay ejercicios que no le suponen demasiado esfuerzo y le suelen salir bien. Al fin y al cabo, sólo hay que prestar un poco de atención en clase, fijarse en el enunciado del ejercicio para saber cuáles son los datos y qué se tiene que hacer, tener cuidado en seguir todos los pasos y anotar claramente la solución. Laura piensa que si sabes las matemáticas, rápidamente se encuentra la solución y que todos los problemas de mates tienen una (y sólo una) solución a no ser que estén mal planteados (véase Schoenfeld, 1992, para un estudio sobre las creencias de los estudiantes acerca de la naturaleza de los problemas matemáticos.).

La confusión de Laura con las matemáticas aumenta cuando empieza a estudiar esta materia con Lola. Esta profesora les dice que las matemáticas, igual que las otras asignaturas, son importantes porque les enseñan a pensar y a aprender, pero que para ello tienen que

esforzarse en pensar sobre el problema y no tanto en la solución al problema. Laura no entiende muy bien qué significa esa frase, pero se ha dado cuenta de que les pone tareas diferentes de otros profesores. Hace unos días les dio unos resultados y tuvieron que pensar ellos el problema. Lola les dijo a casi todos que lo habían hecho bien, pero Laura se siente bastante insegura. Para este fin de semana les ha propuesto resolver dos problemas. El primer problema dice lo siguiente:

Tres amigas, Ana, Berta y Carlota, están comiendo una pizza. Ana come $\frac{2}{5}$, mientras que Berta come $\frac{3}{7}$. ¿Cuánta pizza le queda a Carlota?

Cuando Laura se pone a resolver la tarea no tiene apenas que pensar, suma las dos fracciones, tras haber hallado su denominador común, y resta el resultado a la unidad. Encuentra que la pobre Carlota sólo se come un $\frac{6}{35}$ de la pizza (¡menos de la sexta parte!, ¡qué cara tienen sus amigas!).

El segundo problema es muy parecido, también tiene que ver con pizzas:

Tres amigas, Ana, Berta y Carlota, están comiendo una pizza. Entre Ana y Berta se comen $\frac{3}{4}$. Entre Ana y Carlota se comen $\frac{5}{7}$. Tras acabar de comer discuten porque Carlota dice que ha comido menos y que tiene que pagar menos que las otras, la parte proporcional de lo que ha comido. La pizza ha costado 12 euros. ¿Cuánto debería pagar Carlota? ¿Te parece justo?

Laura inmediatamente plantea dos ecuaciones, una representando lo que comen Ana y Berta, otra representando lo que comen Ana y Carlota, pero tras muchas cuentas, cambios y tachones, no consigue solucionar nada. Trata de hacer una representación gráfica de los datos del problema, pero como tiene que representar una fracción sobre otra no sabe hacerlo. Laura concluye que o el problema está mal planteado o Lola quiere fastidiarlos.

La diferencia más importante entre las dos tareas es que la primera es un *ejercicio* para Laura, mientras que la segunda constituye un verdadero *problema*. En un ejercicio, el estudiante pone en marcha procedimientos que

conoce previamente, sin apenas tener que tomar decisiones sobre qué está haciendo. Podríamos decir que nada más leer el enunciado a Laura «se le dispara» que debe hacer sumas y restas de fracciones, aunque a veces se pueda equivocar en cuentas o procedimientos complicados o en aquellos que no ha practicado suficiente y tiene, por tanto, poco automatizados. Son ejercicios aquellas tareas que habitualmente se ponen tras una explicación o la presentación de una fórmula y que, como su mismo nombre indica, sirven para ejercitar y convertir en rutinarios ciertos procedimientos.

No obstante, los ejercicios no ayudan a pensar sobre un contenido ni sobre una tarea. Para aprender a pensar son mucho más útiles los problemas o situaciones en los que, de alguna manera, el estudiante se ve forzado a tomar decisiones y, por tanto, a elegir cuál de los procedimientos que ha adquirido es más útil en una determinada tarea. En el segundo problema a Laura también «se le han disparado» los procedimientos de solución, pero, en este caso, le han servido de muy poco. Tampoco ha conseguido nada siguiendo un procedimiento habitual, pero más reflexivo: representar el problema de manera diferente. Si el objetivo de la tarea fuera, tal y como se lo ha planteado Laura, encontrar soluciones a las preguntas, la tarea habría resultado un fracaso. Pero Lola, la profesora, estaba interesada por otros aspectos. Uno de estos aspectos era precisamente romper con la rutina y las ideas preconcebidas sobre cómo son los problemas de matemáticas. Por este motivo, ha planteado dos tareas: una más rutinaria y fácil, y otra que debe afrontarse con una perspectiva nueva y que ayude a que los estudiantes se paren a pensar y a planificar cuáles son las acciones que deben realizar. Lola sabe que no basta con decir que se debe planificar antes de actuar o que

hay que pensar para qué y por qué seguimos un procedimiento. Es preciso plantear tareas o situaciones en que la planificación, la supervisión y la autoevaluación sean necesarias y, además, es preciso

Es preciso plantear tareas o situaciones en que la planificación, la supervisión y la autoevaluación sean necesarias y, además, es preciso enseñar y aprender estas competencias

enseñar y aprender estas competencias, como se propone hacer en su próxima clase.

Cuando Lola llega a clase el lunes encuentra a los alumnos alterados. Ninguno ha encontrado la solución al segundo problema, aunque casi todos han llegado a los 6/35 del primero. No obstante, Lola no se deja amilanar y empieza a trabajar con el grupo. Lo primero que les pide es que expliquen cuál es el objetivo del problema. Un estudiante enseguida dice que se trata de que entre las otras dos no estafen a Carlota, pero que si Carlota tiene que dedicarse a hacer estas cuentas, el dinero que se ahorre, se lo va a gastar en aspirinas. Lola aprueba esta opinión y plantea que entonces hay que pensar un método más sencillo de ayudar a Carlota. Pide que alguien lea en voz alta y despacio el problema desde el principio. Saca a Laura a la pizarra para que vaya dibujando de nuevo la pizza y poniendo los datos en ella, tal y como había intentado hacer en casa. Lola recuerda que el objetivo es que no se estafe a Carlota. Cuando llegan a que entre Ana y Berta se comen $\frac{3}{4}$ de la pizza, Laura divide la pizza en cuatro partes y sombrea tres. Lola repite en voz alta: « $\frac{3}{4}$ de la pizza. ¿Qué quiere decir esto?». La profesora en este momento pretende que Laura supervise su dibujo y, por tanto, controle mejor su actuación. Como consecuencia de la intervención de Lola, Laura levanta la tiza y dice: «Espera, vuelve a leer eso»... «Pues, si Ana y Berta se comen $\frac{3}{4}$, entonces...» «Entonces, ¿qué?», pregunta la profesora. «Pues que Carlota se come lo demás.» En ese momento la profesora pide a todos que miren lo que han hecho en casa y evalúen su trabajo. La clase continúa un poco más discutiendo cuánto debe pagar Carlota y, al finalizar, Lola pide que comparen los dos problemas y que analicen por qué el primer problema es más fácil que el segundo, aunque en el segundo las cuentas son más fáciles. Con estas dos intervenciones, la profesora busca destacar la necesidad de evaluar tanto

Los ejercicios no ayudan a pensar sobre un contenido ni sobre una tarea. Para aprender a pensar son mucho más útiles los problemas o situaciones en los que, de alguna manera, el estudiante se ve forzado a tomar decisiones



los resultados que se logran como la forma de obtenerlos. La discusión finaliza con la idea de que es necesario pensar sobre los datos de la tarea y para qué pueden ser útiles.

Lola parece ser una profesora que busca que sus alumnos piensen matemáticamente. En este caso, el contenido del problema y la forma de plantear la reflexión han permitido trabajar aspectos sobre la comprensión y la planificación del problema que con otros ejercicios más rutinarios no hubiera sido posible y ha ayudado a que los estudiantes diferencien entre distintos tipos de tareas. Para crear este espacio ha sido muy importante tanto que los alumnos trabajaran antes la tarea y fueran conscientes de su dificultad, como que Lola haya guiado esta solución.

Utiliza esta misma forma de trabajar, siempre ligada a los aspectos matemáticos que está enseñando, para desarrollar otras habilidades. Así, tiene previsto poner problemas de geometría en los que no sea necesario hacer ningún cálculo, pero en los que los alumnos tengan que ir pensando en pequeños grupos sobre las propiedades de las figuras geométricas. El trabajo en pequeños grupos hace que los estudiantes puedan intercambiar más fácilmente sus ideas. También va a buscar tareas abiertas en las que los datos importantes no sean evidentes, sino que tengan que ser inferidos por los alumnos a partir de una observación. Para estas tareas ha hablado con los profesores de naturales que dan clase a su mismo grupo. Es consciente de que los estudiantes encontrarán diferentes soluciones según a qué datos atiendan, pero esto puede permitir discusiones sobre la relación entre procesos y resultados. Quizá también pueda trabajar con los de sociales en tareas de representación gráfica... Cree que este trabajo con otras asignaturas dará un mayor sentido a lo que están haciendo y permitirá que los estudiantes capten algunas de las funciones de las matemáticas.

En definitiva, Lola cree, y nosotros estamos de acuerdo con ella, que, si queremos enseñar a pensar a nuestros estudiantes, tenemos que hacer que nuestras clases de matemáticas, historia

o literatura se conviertan en espacios de reflexión en los que se resuelven tanto ejercicios que desarrollen procedimientos como problemas en los que se usen esos procedimientos para otros fines. Esta profesora tiene claro que enseñar matemáticas implica tanto explicar los conceptos o procedimientos propios de la materia como enseñar a utilizarlos en la resolución de problemas, haciendo que los alumnos aprendan a planificar, supervisar y evaluar sus propias tareas de aprendizaje, que para ello deben convertirse en verdaderos problemas (Pérez Echeverría, 2004; Pozo, Monereo y Castelló, 2001). También es consciente de que los problemas son más difíciles que los ejercicios y de que, si deja a sus alumnos solos, es muy fácil que se pierdan. Por este motivo, trata de guiar sus reflexiones, aunque se puede esperar que esta guía de Lola vaya siendo progresivamente menos necesaria y sus alumnos vayan aprendiendo a aprender de forma cada vez más autónoma.

HEMOS HABLADO DE:

- Autorregulación del aprendizaje.
- Competencia de aprender a aprender.
- Competencia matemática.
- Resolución de problemas.

Referencias bibliográficas

- PÉREZ ECHEVERRÍA, M.P. (2004): «Solución de problemas», en CARRETERO, M.; ASENSIO, M. (eds.): *Psicología del pensamiento*. Madrid. Alianza.
- POZO, J.I.; MONEREO, C.; CASTELLÓ, M. (2001): «El uso estratégico del conocimiento», en COLL, C.; PALACIOS, J.; MARCHESI, A. (eds.): *Desarrollo psicológico y educación*. Vol. II: *Psicología de la educación escolar*. Madrid. Alianza.
- SCHOENFELD, H.A. (1992): «Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in Mathematics», en GROUWS, D.A. (ed.): *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Nueva York. Mc Millan.

M.^a del Puy Pérez Echeverría

Juan Ignacio Pozo

Universidad Autónoma de Madrid

mdelpuy.perez@uam.es

nacho.pozo@uam.es

Este artículo fue solicitado desde AULA DE INNOVACIÓN EDUCATIVA en abril del 2009 y aceptado en noviembre del 2009 para su publicación.